

6ème-addition, soustraction, multiplication	2
5ème-symétrie centrale (par rapport à un point)	6
4ème-probabilité (simulation)	10
3ème-notion de fonction	13
2nde-vecteurs	16
1èreSpé-suites	24
Tle Spé-dérivation et convexité	29

Addition – Soustraction – Multiplication

1) addition et soustraction :

a) l'addition

additionner, c'est **ajouter** !



$$56,4 + 25,7 = 82,1$$

- **82,1** est la **somme** de 56,4 et 25,7 : c'est le résultat de l'addition
- **56,4** et **25,7** sont les **termes** de la somme

propriété : Pour calculer une somme, on peut **changer l'ordre** des termes et les **regrouper** comme on le veut.

Ex :

$$7 + 2,4 + 3 + 2,6$$

$$= 7 + 3 + 2,4 + 2,6$$

$$= (7 + 3) + (2,4 + 2,6)$$

$$= 10 + 5$$

$$= 15$$

j'ai changé l'ordre des termes !

j'ai regroupé des termes pour faciliter les calculs !

b) la soustraction

soustraire, c'est **enlever ou retrancher** !



$$56,4 - 25,7 = 30,7$$

- **30,7** est la **différence** de 56,4 et 25,7 : c'est le résultat de la soustraction
- **56,4** et **25,7** sont les **termes** de la différence

attention ! On ne peut pas changer l'ordre des termes d'une soustraction ! On peut calculer **15 - 7** mais **pas 7 - 15** !!



c) la multiplication

J'achète 5 stylos à 1,2 € l'un. Ma dépense totale sera de :

$$1,2 + 1,2 + 1,2 + 1,2 + 1,2$$

Le résultat correspond à **5 fois le nombre 1,2**.

$$\text{Cela s'écrit } 1,2 + 1,2 + 1,2 + 1,2 + 1,2 = 5 \times 1,2 = 6 \text{ €}$$



$$5 \times 1,2 = 6$$

- **6** est le **produit** de 1,2 **par** 5
- **1,2** et **5** sont les **facteurs** du produit

propriétés :

- **Multiplier** un nombre par **10**, **100**, **1000**,... revient à décaler la virgule de 1, 2 ou 3 rangs vers la **droite**, en complétant par le nombre de zéros nécessaires.
Ex : $89 \times 100 = 8900$ $7,34 \times 10 = 73,4$ $13,2 \times 100 = 1320$
- **Multiplier** un nombre par **0,1** ; **0,01** ; **0,001**,... revient à décaler la virgule de 1, 2 ou 3 rangs vers la **gauche**, en complétant par le nombre de zéros nécessaires.
Ex : $89 \times 0,1 = 8,9$ $7,34 \times 0,01 = 0,0734$ $13,2 \times 0,1 = 1,32$

propriété : Pour calculer un produit, on peut **changer l'ordre** des facteurs et les **regrouper** comme on le veut.

Ex :

$$4 \times 35,5 \times 2,5$$

$$= 4 \times 2,5 \times 35,5$$

$$= (4 \times 2,5) \times 35,5$$

$$= 10 \times 35,5$$

$$= 355$$

j'ai changé l'ordre des facteurs !

j'ai regroupé des facteurs pour faciliter les calculs !

II) Ordre de grandeur :

Je dois annoncer à la radio l'augmentation du prix moyen du kilogramme d'abricots qui est passé de 1,97 € à 3,52 € !

Pour ne pas lasser l'auditeur avec des nombres compliqués, je vais donner **une valeur approximative** du résultat.

Le kilogramme valait *environ* 2 € (j'ai arrondi 1,97)

Le kilogramme vaut maintenant *environ* 3,5 € (j'ai négligé les centièmes)

Je calcule mentalement une augmentation égale à *environ* :
(3,5 – 2) soit 1,5 €

1,5 € est un ordre de grandeur du résultat



Ex:

Donnons un **ordre de grandeur** de $3044,67 + 9887,76$:

$3044,67 + 9887,76$ est égal à environ $3000 + 10000$ soit environ **13000**

Donnons un **ordre de grandeur** de $9887,76 - 3044,67$:

$9887,76 - 3044,67$ est égal à environ $10000 - 3000$ soit environ **7000**

Donnons un **ordre de grandeur** de $1,96 \times 3,2$:

$1,96 \times 3,2$ est égal à environ 2×3 soit environ **6**

III) Priorité de la multiplication et de la division par rapport à l'addition et la soustraction :

a) expression sans parenthèses :

$$5 + 9 - 7 + 19 - 2 = 24$$

$$14 - 7 + 19 - 2$$

$$7 + 19 - 2$$

$$26 - 2$$

$$24$$

Règle : dans une expression comprenant **uniquement** des **additions et des soustractions**, on effectue les calculs de **gauche à droite**.

$$5 \times 9 - 4 + 3 \times 2 - 5 = 42$$

$$45 - 4 + 6 - 5$$

$$41 + 6 - 5$$

$$42$$

Règle : dans une expression sans parenthèses, on effectue **les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions**.

$$5 \times 9 - 4 : 2 + 6 = 49$$

$$45 - 2 + 6$$

$$49$$

Il n'y a plus que des additions et des soustractions, j'effectue les calculs de gauche à droite !



b) expression avec parenthèses :

$$[45 - (7 + 3)] \times (7 - 5) = 70$$

$$(45 - 10) \times 2$$

$$35 \times 2$$

$$70$$

Règle : dans une expression comprenant des parenthèses, on effectue **d'abord les calculs entre parenthèses en commençant par les plus "intérieures"**

Ex : calculer les expressions suivantes

$$17 - 6 + 4 - 2$$

$$= 11 + 4 - 2$$

$$= 15 - 2$$

$$= 13$$

j'effectue les calculs de gauche à droite !



$$24 - 2 \times 6 + 20 : 4 \times 5$$

$$= 24 - 12 + 25$$

$$= 12 + 25$$

$$= 37$$

pas de parenthèses, je commence par les multiplications et les divisions !



$$19 - [42 : (3 + 4)]$$

$$= 19 - (42 : 7)$$

$$= 19 - 6$$

$$= 13$$

je commence par les calculs entre parenthèses !



IV) Additionner, soustraire des durées :

rappel :

1 jour = 24 heures = 24 h; 1 h = 60 minutes = 60 min; 1 min = 60 secondes = 60 s

Ex : 2 h 35 min + 4 h 21 min =

On ajoute les heures aux heures et les minutes aux minutes !



$$\begin{array}{r} 2 \text{ h } 35 \text{ min} \\ + 4 \text{ h } 41 \text{ min} \\ \hline 6 \text{ h } 76 \text{ min} \end{array} \quad \text{or, } 76 \text{ min} = 60 \text{ min} + 16 \text{ min} = 1 \text{ h } 16 \text{ min}$$

donc 2 h 35 min + 4 h 21 min = 7 h 16 min

Ex : 5 h 16 min – 2 h 51 min =

$$\begin{array}{r} 5 \text{ h } 16 \text{ min} \\ - 2 \text{ h } 51 \text{ min} \\ \hline \text{-----} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 4 \text{ h } 76 \text{ min} \\ - 2 \text{ h } 51 \text{ min} \\ \hline 2 \text{ h } 25 \text{ min} \end{array}$$

On ne peut pas enlever 51 à 16, on convertit donc 5 h 16 min en 4 h 76 min !



donc 5 h 16 min – 2 h 51 min = 2 h 25 min

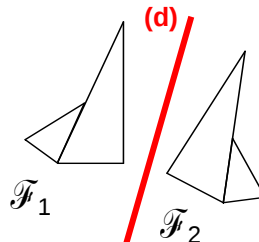
Symétrie centrale

(symétrie par rapport à un point)

Rappel sur la symétrie axiale :

définition : Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite (d)** si ces deux figures **se superposent** par pliage le long de cette droite. Cette **droite** est appelée **l'axe de la symétrie**.

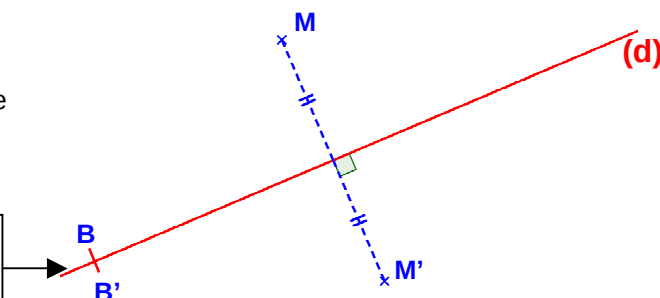
- la figure $\mathcal{F}_1$ est le symétrique de la figure $\mathcal{F}_2$ par rapport à (d)
- les figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont symétriques par rapport à la droite (d)



définition : Le symétrique d'un point **M** **par rapport à une droite d** est le point **M'** tel que **la droite d est la médiatrice du segment [MM']**



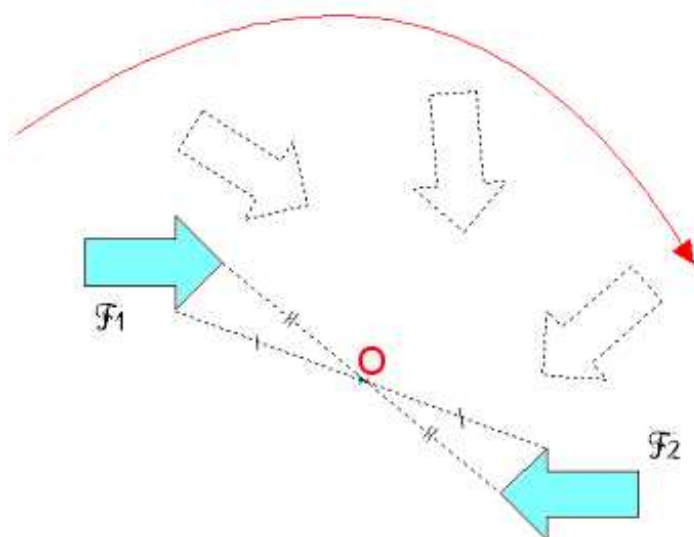
B appartient à la droite (d), son symétrique **B'** est le point B lui même !



I) Figures symétriques :

définition :

Dire que **deux figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$** sont **symétriques par rapport à un point O** signifie que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ se superposent par un **demi-tour autour de O**.
Ce point **O** est appelé **le centre de la symétrie centrale**.



O est le **milieu** de tous les segments joignant 2 points symétriques.

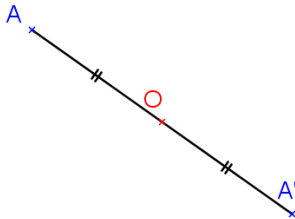


- la figure $\mathcal{F}_1$ est le symétrique de la figure $\mathcal{F}_2$ par rapport à O
- les figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont symétriques par rapport à O

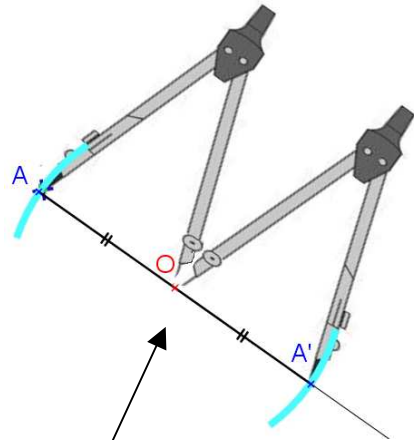
II) Symétrique d'un point :

définition :

Le **symétrique d'un point A** par rapport à un point O **est le point A'** tel que **O soit le milieu du segment [AA']**



Le symétrique de O par rapport à O est lui même !

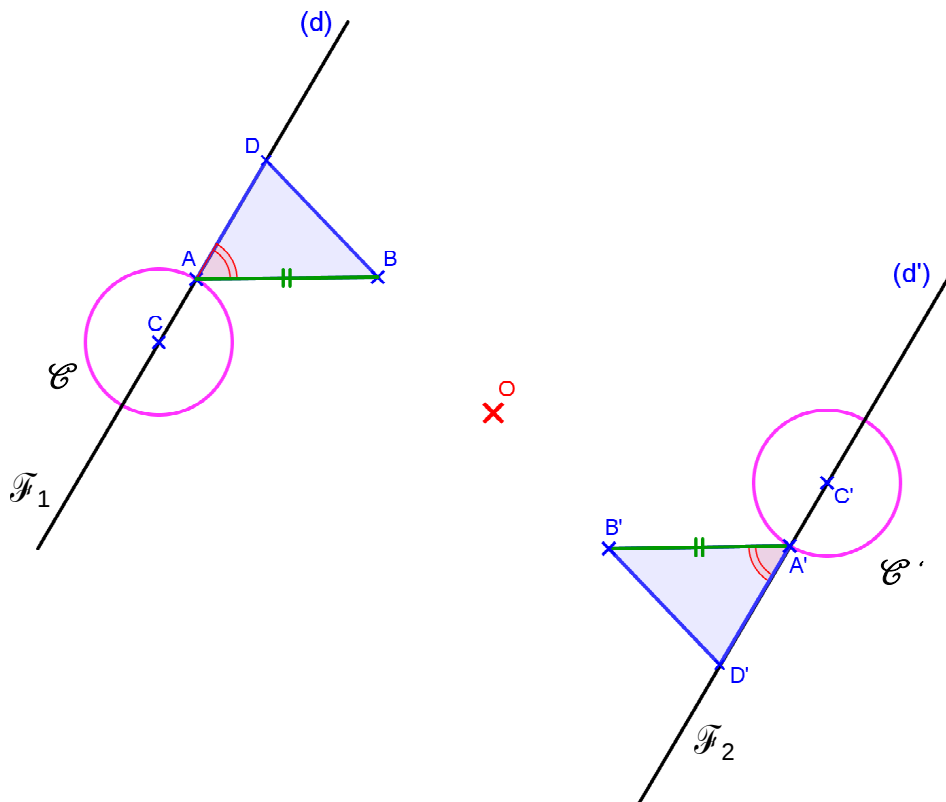


construction du symétrique A' de A par rapport à O

- je trace une demi-droite [AO)
- je fixe l'écartement du compas à AO
- je reporte la distance à l'aide du compas à partir de O de l'autre côté de O
- A' est le point d'intersection entre l'arc de cercle tracé et la demi-droite

II) Propriétés de la symétrie centrale:

Les deux figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ci-dessous sont symétriques par rapport au point O.



A', B', C', D' désignent respectivement les symétriques des points A, B, C, D par rapport à O.



propriété :

- Si **trois points sont alignés**, alors **leurs symétriques** par rapport à un point **sont également alignés**.

Dans l'exemple ci-dessus :

- D, A, C sont alignés, D', A', C' le sont également



propriété :

- Le **symétrique d'une droite** par rapport à un point est **une droite** qui lui est **parallèle**.

Dans l'exemple ci-dessus :

- $(d) \parallel (d')$ (on dit que les deux droites ont **la même direction**)



propriété :

- Le **symétrique d'un segment** par rapport à un point est **un segment** qui lui est **parallèle** et **de même longueur**.

Dans l'exemple ci-dessus :

- $[AB] \parallel [A'B']$
- $AB = A'B'$



propriété :

- Si **deux angles** sont **symétriques par rapport à un point**, alors ils **ont la même mesure**.

Dans l'exemple ci-dessus :

- $\widehat{DAB} = \widehat{D'A'B'}$



propriété :

- Deux figures symétriques par rapport à un point sont **superposables**.

La **symétrie centrale conserve** les **formes**, les **longueurs**, les **périmètres**, les **aires**.

Dans l'exemple ci-dessus :

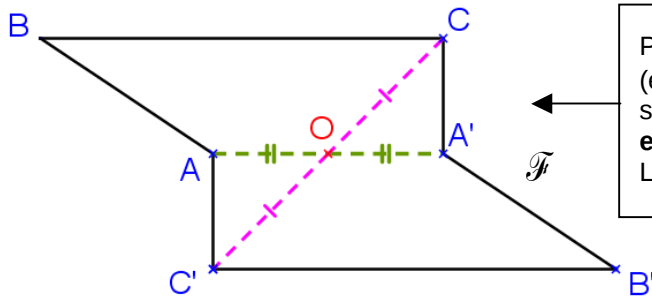
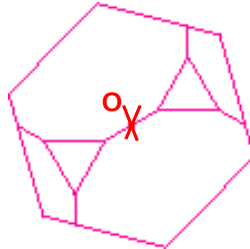
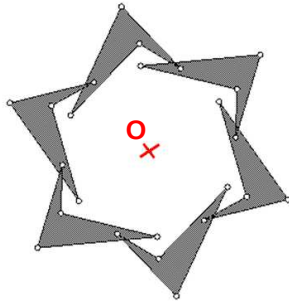
- $AB = A'B'$
- Les périmètres des triangles ADB et A'B'D' sont égaux
- L'aire des triangles ADB et A'B'D' est identique



III) Centre de symétrie d'une figure :

définition : Un point O est le **centre de symétrie** d'une figure $\mathcal{F}$ si la figure symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à O est la figure $\mathcal{F}$ elle-même.

Exemples :



Pour trouver le centre de symétrie de la figure $\mathcal{F}$ (en supposant qu'elle admet un centre symétrie), il suffit de **tracer deux segments dont les extrémités sont des points symétriques**. L'intersection des deux segments sera le point O !



Probabilité

I) Notion de fréquence d'une issue:

l'expérience est **aléatoire**. On ne peut pas prévoir avec certitude l'issue qu'on va obtenir !



Considérons l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé non truqué. On regarde ensuite le nombre de points figurant sur la face supérieure. Les issues sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On reproduit l'expérience 100 fois.

Pour cela, nous allons utiliser un logiciel de simulation conçu à partir d'un tableur :

Le logiciel a été réglé pour effectuer automatiquement et aléatoirement 100 lancers. Voici le tableau regroupant les résultats.



AVEC UN DÉ :

	Lancers manuels		Face tirée		Lancers automatiques		Nb de lancers
	RAZ				RAZ		100
Faces :	1	2	3	4	5	6	Total
Nb de tirages	14	16	18	19	18	15	100
fréquence d'apparition (%)	14,0%	16,0%	18,0%	19,0%	18,0%	15,0%	100%
fréquence d'apparition	0,14	0,16	0,18	0,19	0,18	0,15	1
fréquence d'apparition (en sixièmes)	$\frac{0,84}{6}$	$\frac{0,96}{6}$	$\frac{1,08}{6}$	$\frac{1,14}{6}$	$\frac{1,08}{6}$	$\frac{0,90}{6}$	$\frac{6,00}{6}$

La fréquence d'apparition de 4 est d'environ 0,19 soit 19%.
La **fréquence de l'issue 4** a été d'environ **0,19** sur cette série de 100 lancers.

II) Lien entre la fréquence d'une issue et sa probabilité:

propriété : Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la **fréquence d'une issue** est **très proche de sa probabilité**.

Ex : Nous allons reproduire l'expérience aléatoire précédente 1000 fois grâce au logiciel de simulation.

AVEC UN DÉ :

	Lancers manuels		Face tirée		Lancers automatiques		Nb de lancers
	RAZ				RAZ		1000
Faces :	1	2	3	4	5	6	Total
Nb de tirages	62	58	40	52	61	57	330
fréquence d'apparition (%)	18,8%	17,6%	12,1%	15,8%	18,5%	17,3%	100%
fréquence d'apparition	0,62	0,58	0,40	0,52	0,61	0,57	1
fréquence d'apparition (en sixièmes)	$\frac{1,13}{6}$	$\frac{1,05}{6}$	$\frac{0,73}{6}$	$\frac{0,95}{6}$	$\frac{1,11}{6}$	$\frac{1,04}{6}$	$\frac{6,00}{6}$
Probabilité de l'issue	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

La fréquence de l'issue 4 est de $\frac{1,04}{6}$.

Elle est pratiquement égale à la probabilité de l'issue 6 qui est $\frac{1}{6}$!

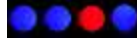


III) Simuler une expérience aléatoire avec un tableur :

aléatoire vient du latin, alea signifiant "**hasard**", c'est l'instruction que nous allons utiliser avec le tableur !



Considérons l'expérience aléatoire suivante :



On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. On regarde la couleur de la boule obtenue.

Nous allons simuler cette expérience 300 fois à l'aide du tableur.

=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;4)=1;"R";"B")

alea est l'instruction "**hasard**".

alea.entre.bornes(1,4)

signifie

"tirage au hasard d'un chiffre compris entre 1 et 4".

Si(alea.....(....)=1;"R";"B")

signifie "si la boule tirée est la numéro 1 on marque R (c'est la boule rouge), dans les autres cas, on marque B (c'est une boule bleue)".

on recopie la cellule A1 jusqu'à J30, on a donc reproduit 300 fois

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
2	B	R	R	B	B	B	B	B	B	B
3	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
4	B	B	B	B	R	R	B	R	R	R
5	R	B	B	B	B	B	B	B	B	R
6	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
7	B	B	B	B	B	R	B	R	B	B
8	B	R	B	B	B	B	B	B	R	B
9	B	B	B	R	B	B	R	B	B	B
10	R	B	B	B	R	B	B	B	B	B
11	B	B	B	R	B	B	R	B	B	B
12	B	R	B	B	B	B	R	R	B	B
13	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
14	B	B	B	B	B	B	B	B	R	B
15	B	R	B	B	B	B	B	R	B	B
16	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
17	B	B	B	R	B	B	B	R	B	B
18	B	B	B	B	B	B	R	B	R	R
19	B	B	B	R	R	B	B	R	B	B
20	B	B	R	B	B	B	R	B	B	B
21	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B
22	B	B	R	B	B	B	R	B	B	B
23	R	B	R	B	R	B	B	R	B	B
24	B	B	B	B	B	B	B	B	R	R
25	R	B	B	B	B	B	B	B	B	R
26	B	R	B	B	B	B	B	B	B	B
27	B	R	B	R	B	B	B	B	B	B
28	B	R	B	B	B	B	B	R	R	B
29	R	R	B	B	B	B	R	B	B	B
30	B	B	B	B	B	B	R	R	R	B

NB sert à compter le nombre de cellules. On pose ensuite une condition avec SI. Les cellules comptées doivent être dans la zone A1:J30 et indiquer "R" On obtient ainsi l'effectif des tirages de la boule rouge.

L	M	N
couleur	effectif	fréquence
rouge	61	0,20
bleue	239	0,79

=NB.SI(A1:J30;"R")

=NB.SI(A1:J30;"B")

Pour avoir la fréquence de l'issue "bleue", on divise le contenu de la cellule M3 (effectif des tirages d'une boule bleue) par l'effectif total des tirages(300).

=M3/300

La fréquence de l'issue "rouge" est d'environ 0,2.

Elle est très proche de la **probabilité d'obtenir une boule rouge** (une chance sur 4)

soit $\frac{1}{4} = 0,25$. Plus on augmente le nombre d'expériences, plus la fréquence se rapproche de la probabilité.

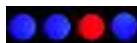


IV) Simuler une expérience aléatoire avec une calculatrice :

random signifie "aléatoire" en anglais. C'est l'instruction que nous allons utiliser avec les calculatrices (**RND**) !



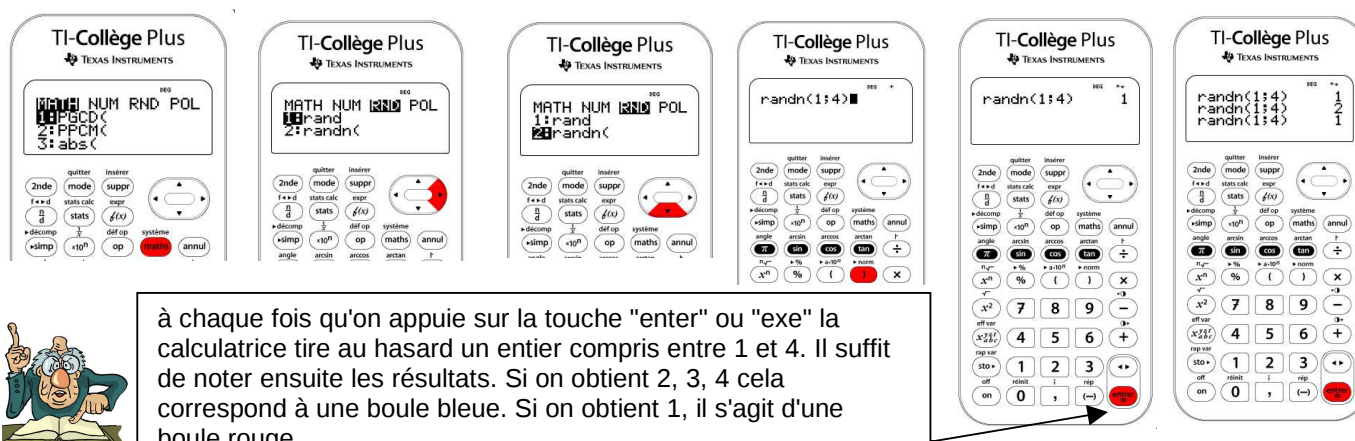
Reprenons l'expérience précédente :



On tire au hasard une boule dans un sac contenant 3 boules bleues, une boule rouge, une boule verte. On regarde la couleur de la boule obtenue.

La calculatrice ne travaille pas avec des couleurs mais avec des nombres. Nous allons donc simuler l'expérience en associant un nombre entier à chaque couleur. Nous demanderons ensuite à la calculatrice de "choisir" au hasard un nombre parmi ceux-ci.

boule	première boule bleue	deuxième boule bleue	troisième boule bleue	boule rouge
nombre associé	1	2	3	4



à chaque fois qu'on appuie sur la touche "enter" ou "exe" la calculatrice tire au hasard un entier compris entre 1 et 4. Il suffit de noter ensuite les résultats. Si on obtient 2, 3, 4 cela correspond à une boule bleue. Si on obtient 1, il s'agit d'une boule rouge.

ALPHA ,

1

SECONDE 3

4)

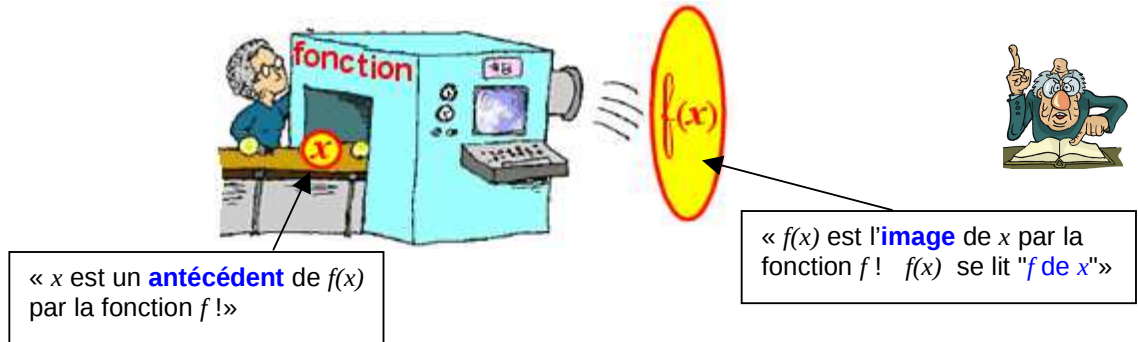
EXE



Notion de fonction

I) Notations et vocabulaire :

Définition : À un nombre x , une **fonction** f associe un nombre **unique** noté $f(x)$.



Exemple :



On la note $f : x \longmapsto x^2 + 1$ $f(x) = x^2 + 1$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

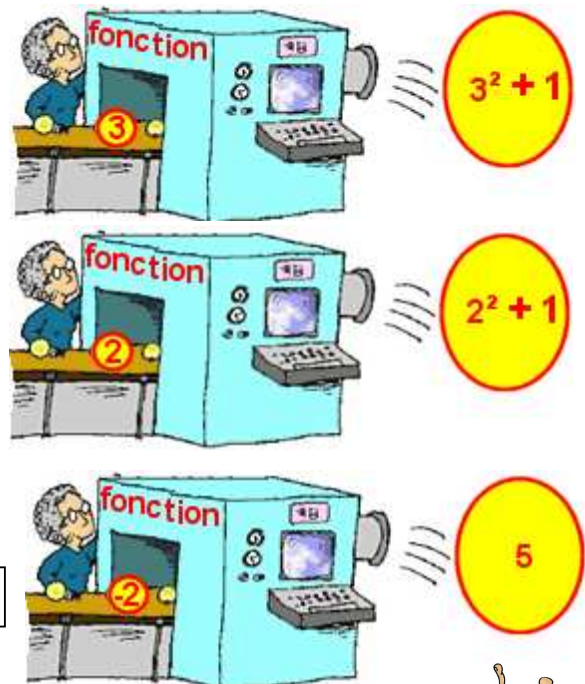
« 10 est l'**image** de 3 par la fonction f »

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

« 2 est un **antécédent** de 5 par la fonction f »

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

« -2 est un **antécédent** de 5 par la fonction f »



« attention ! un nombre peut avoir plusieurs antécédents ! »



II) Détermination d'une fonction :

Reprenons la fonction précédente définie par sa **formule littérale** $f: x \longmapsto x^2 + 1$

On peut la déterminer également :

par un graphique :

La **représentation graphique** d'une fonction f est formée de tous les points de coordonnées $(x ; y)$ avec $y = f(x)$

le point A (3 ; 10) appartient à la courbe

«en effet, $f(3) = 3^2 + 1 = 10$!»



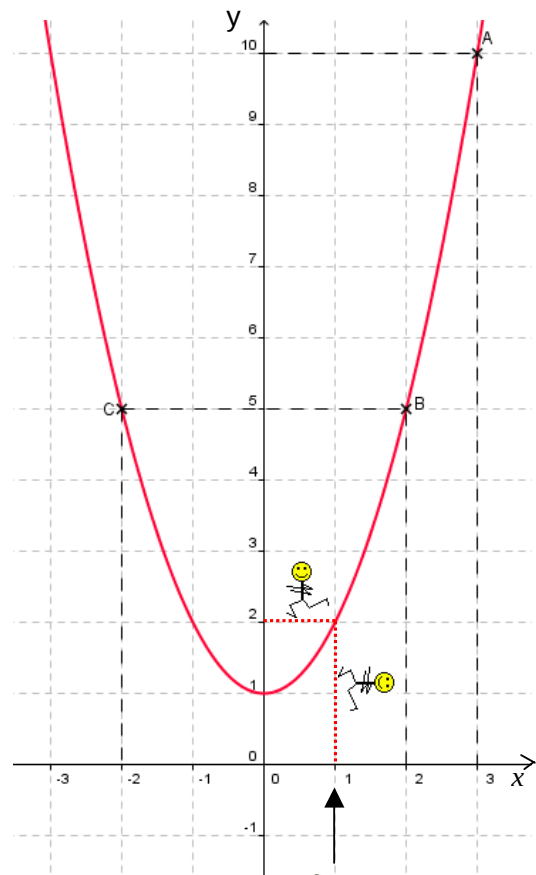
le nombre 5 a deux antécédents : 2 et -2

«en effet, B (2 ; 5) et C (-2 ; 5) sont deux points de la courbe ayant la même ordonnée 5 »



l'image de 1 par la fonction f est 2

«je détermine le point de la courbe d'abscisse 1 et je trouve son ordonnée 2 ! »

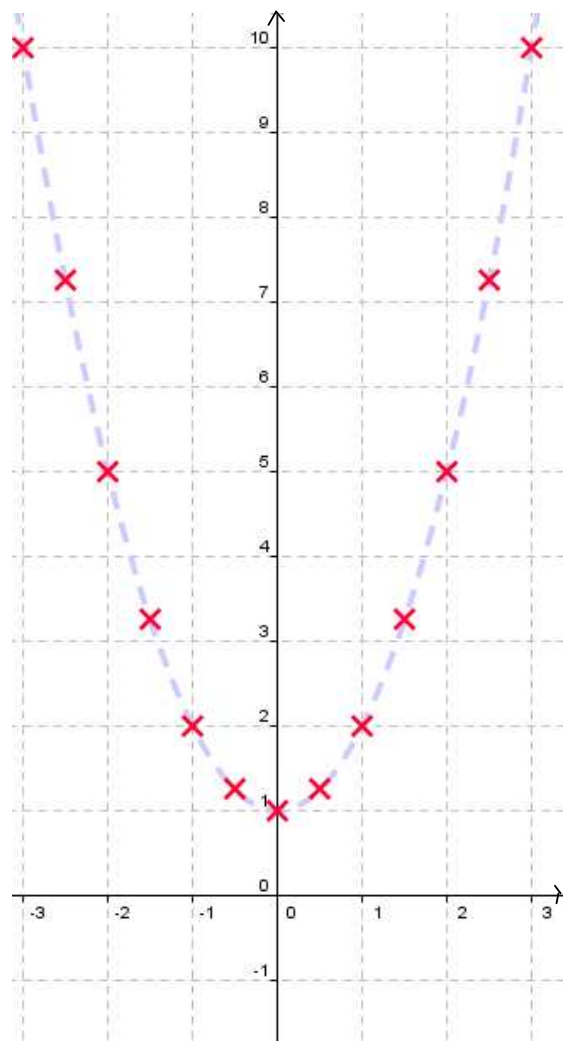


par un tableau de valeurs :

Un tableau de valeurs permet de connaître les valeurs prises par une fonction f pour certaines valeurs de la variable. Avec suffisamment de valeurs, on peut tracer la courbe de façon approchée.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	10	7,25	5	3,25	2	1,25	1	1,25	2	3,25	5	7,25	10

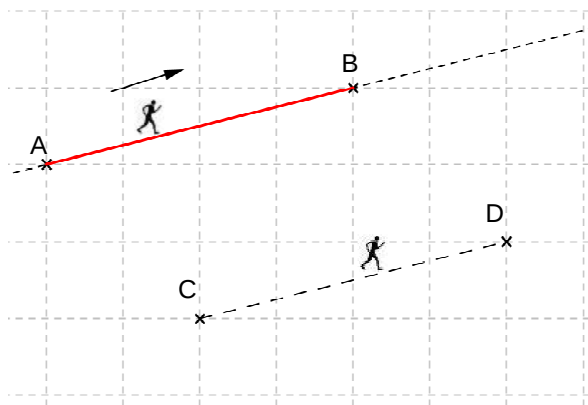
« je place les points et je trace l'allure générale de la courbe
attention ! cela n'est pas très précis, je n'ai que certains points de la courbe !! »



Vecteurs

I) Vecteurs et translation :

a) notion de translation :



Pour aller de A à B, le marcheur se déplace :

- dans le **sens** indiqué par la flèche
- sur une **longueur** correspondant à celle de [AB]
- dans la **direction** indiquée par celle de la droite (en pointillés)

Le point B est obtenu par une translation du point A.

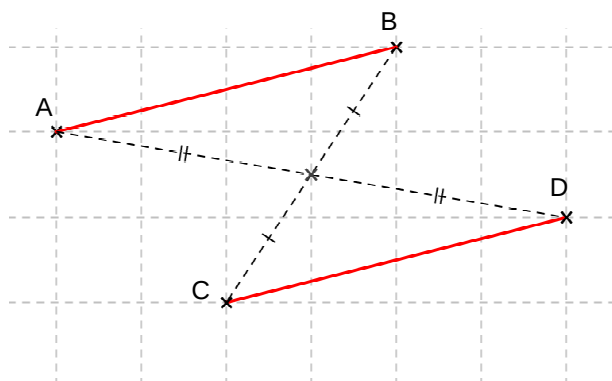
En utilisant la même translation, on transforme C en D.

définition : Soient A et B deux points du plan.

La **translation** qui transforme **A en B** associe à C l'**unique point D** tels que les segments **[AD]** et **[BC]** ont le même milieu.

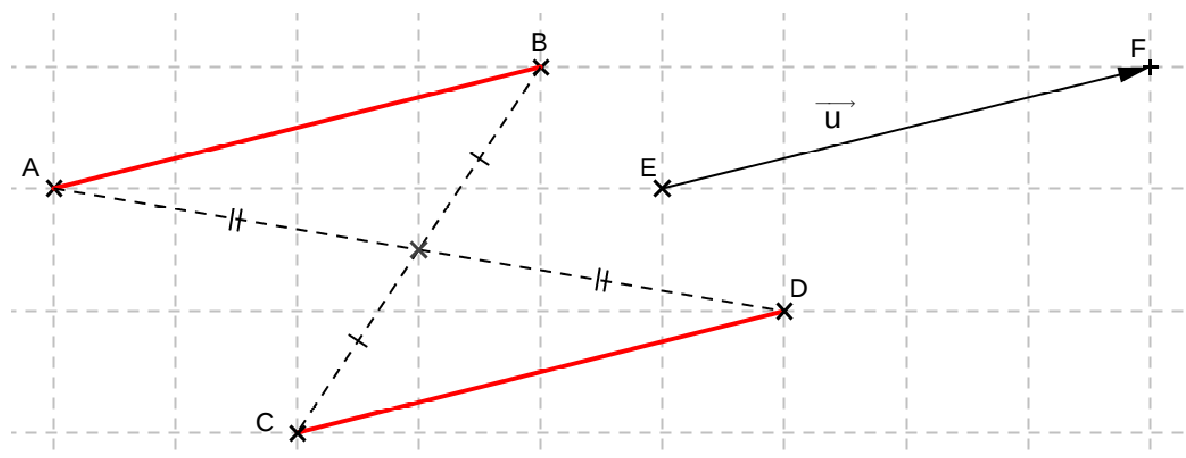
Ex :

ABDC est un parallélogramme ! (attention à l'ordre des points)



b) notion de vecteur :

Le vecteur permet de définir une translation. Il doit donc préciser un sens, une direction, une longueur. On le représente sous forme de segment fléché.



La **translation** qui transforme **A en B** est la **translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$**
 E est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{EF}$
 F est l'**extrémité** du vecteur $\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{EF}$ a pour **direction** celle de (EF) , pour **sens** celui de **A vers B**, pour **longueur** AB !. On peut le noter par une seule lettre, $\vec{u}$ par exemple.



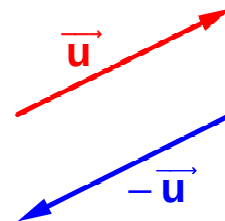
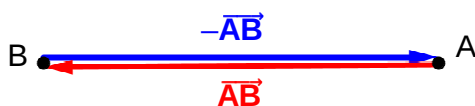
► Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ caractérisent la même translation que $\overrightarrow{EF}$.
 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs égaux.

On peut dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$

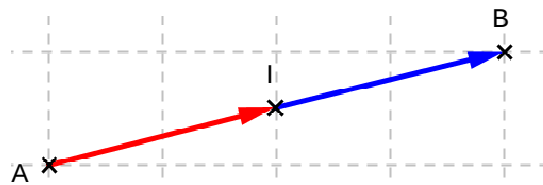


► Si A et B sont confondus, $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\overrightarrow{AA}$. C'est le vecteur nul. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

► Le **vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$** est le vecteur associé à la translation transformant B en A.
 On le note $-\overrightarrow{AB}$. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



► Le point I est le **milieu du segment [AB]** si, et seulement si, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

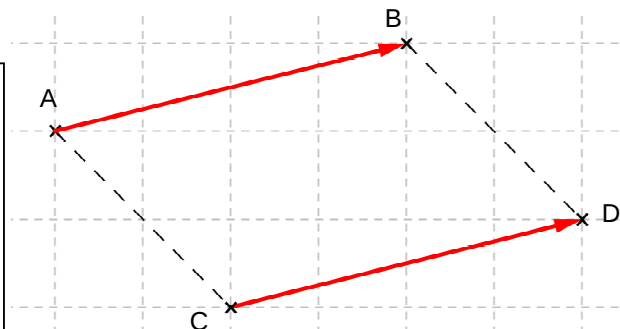
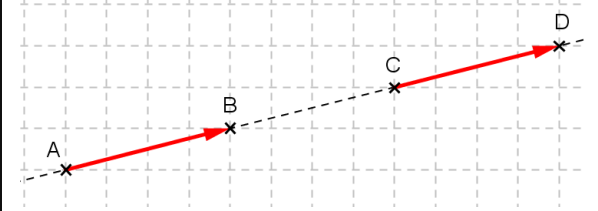


b) vecteurs égaux :

définition : Soient A, B, C, D quatre points du plan avec $A \neq B$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, **ABDC** est un **parallélogramme**.

Si A, B, C, D sont alignés; ABDC sera un parallélogramme aplati !



II) Coordonnées d'un vecteur :

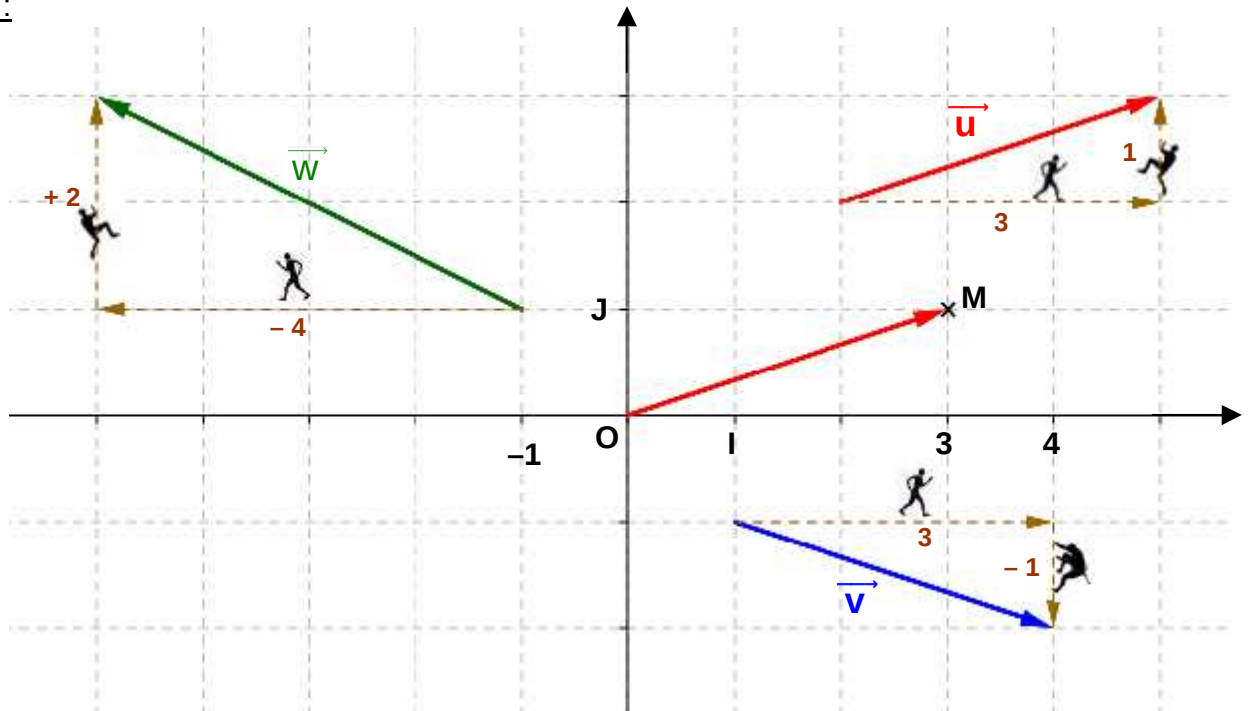
définition : Dans un repère $(O; I; J)$, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$

Les coordonnées du vecteur nul $\vec{0}$ sont $(0;0)$

le repère $(O; I; J)$ est également souvent noté $(O; \vec{i}; \vec{j})$
avec $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$



Ex :



Les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(3;1)$, celles de $\vec{v}$ sont $(3;-1)$ et celles de $\vec{w}$ sont $(-4;2)$

propriété : Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées dans un repère sont égales.

Soient $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) et $\vec{v}$ de coordonnées (x', y') dans un repère (O, I, J)

$$\vec{u} = \vec{v} \text{ si, et seulement si } x = x' \text{ et } y = y'$$

► démonstration

- Si $\vec{u} = \vec{v}$, il existe un unique point M $(x_M; y_M)$ tel que $\vec{OM} = \vec{u} = \vec{v}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées que celles de M : $\begin{cases} x = x_M = x' \\ y = y_M = y' \end{cases}$

- Réciproquement, si deux vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont tels que $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ alors $\vec{u} = \vec{OM}$ et $\vec{v} = \vec{OM}$ (avec M de coordonnées $(x; y)$) donc $\vec{u} = \vec{v} = \vec{OM}$

propriété : Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère.
 Les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont **$(x_B - x_A; y_B - y_A)$**

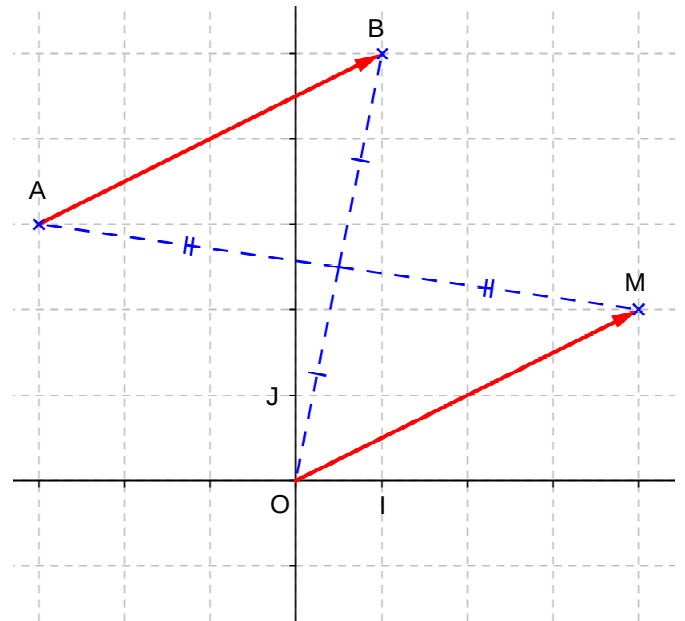
► **démonstration**

Par définition,
 il existe un unique point $M(x_M; y_M)$ tel que
 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont
 celles du point M.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$
 donc OMBA est un parallélogramme
 par suite [AM] et [OB] ont le même milieu .
 cela se traduit par :

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{0 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$



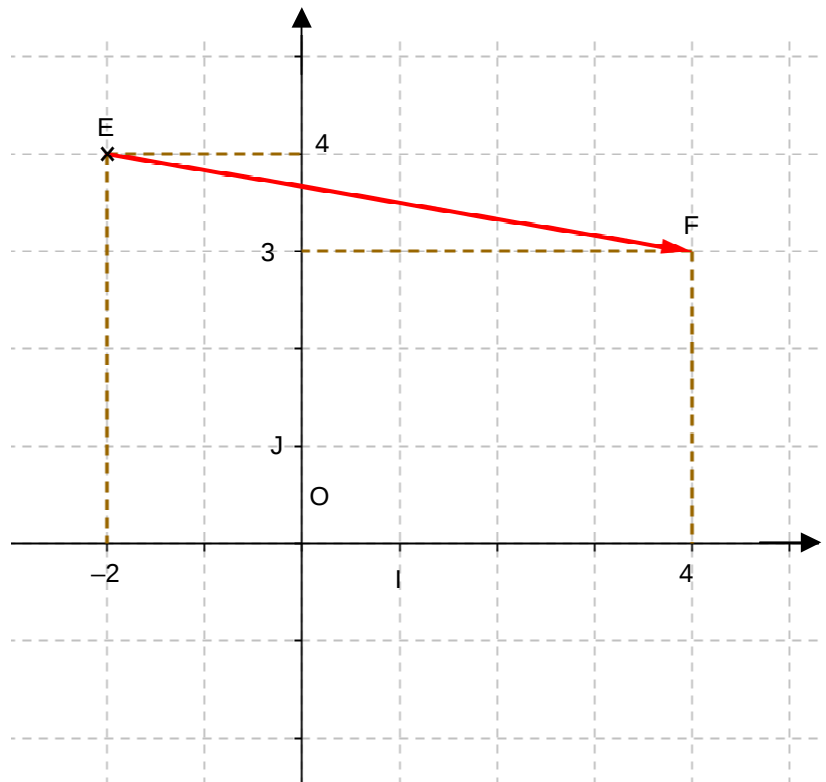
Ex :

E a pour coordonnées $(-2; 4)$

F a pour coordonnées $(4; 3)$

Les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ sont :

$$\begin{aligned} & (x_F - x_E; y_F - y_E) \\ &= (4 - (-2); 3 - 4) \\ &= (4 + 2; 3 - 4) \\ &= (6; -1) \end{aligned}$$



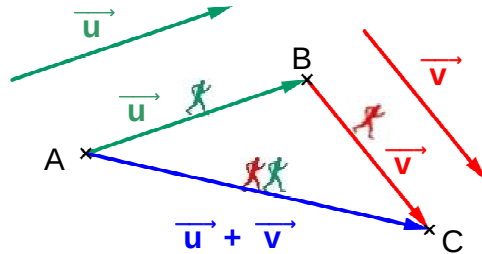
Dans un repère $(O; I; J)$, le **vecteur nul** $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées **$(0; 0)$** !



II) Somme de deux vecteurs :

définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La **somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est **le vecteur associé** à la translation ayant les mêmes effets que **la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de celle de vecteur $\vec{v}$** .
On le note $\vec{u} + \vec{v}$



Par translation de vecteur $\vec{u}$, A a pour image B

Par translation de vecteur $\vec{v}$, B a pour image C

C est l'image de du point A par translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$

relation de Chasles :

D'après ce qui précède,

Quels que soient les points A, B, C du plan, on a l'égalité :

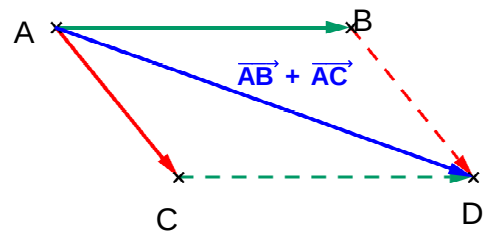
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

propriété : la règle du parallélogramme

Soient A, B, C trois points distincts du plan,

La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$

si, et seulement si, **ABDC** est un **parallélogramme**



► démonstration

- Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ alors, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ et ABDC est un parallélogramme
- Réciproquement, si ABDC est un parallélogramme on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ alors, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (en utilisant la relation de Chasles)

propriétés (admisses):

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Je peux changer l'ordre des termes, les grouper indifféremment, la somme des vecteurs ne changera pas !



propriété (admise):

Dans un repère, si les coordonnées de $\vec{u}$ sont (x, x') et celles de $\vec{v}$ sont (y, y') alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$

Les coordonnées de la somme sont la somme des coordonnées !



Ex: Soient $\vec{u}(-4 ; 3)$ et $\vec{v}(5 ; -2)$

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(-4 + 5 ; 3 + (-2))$ soit $(1 ; 1)$

III) Produit d'un vecteur par un nombre réel :

définition : Soient $\vec{u}(x ; y)$ un vecteur et k un nombre réel.

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky)$

$k\vec{u}$ est le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k



Ex:

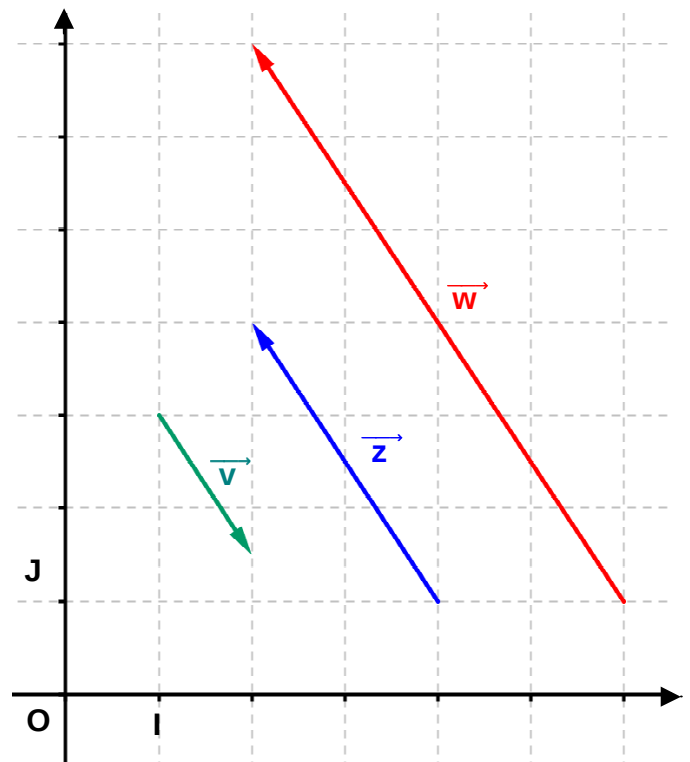
Soient $\vec{z}(-2 ; 3)$, $\vec{w}(-4 ; 6)$, $\vec{v}(1 ; -1,5)$

$$\vec{v} = -\frac{1}{2} \vec{z}$$

$$\vec{w} = 2 \vec{z}$$

Si k est positif, $k\vec{u}$ a le même sens et la même direction que $\vec{u}$
(c'est le cas dans l'exemple pour $\vec{z}$ et $\vec{w}$)

Si k est négatif, $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ mais est de sens contraire
(c'est le cas dans l'exemple pour $\vec{z}$ et $\vec{v}$)



définition : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dit **colinéaires** si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

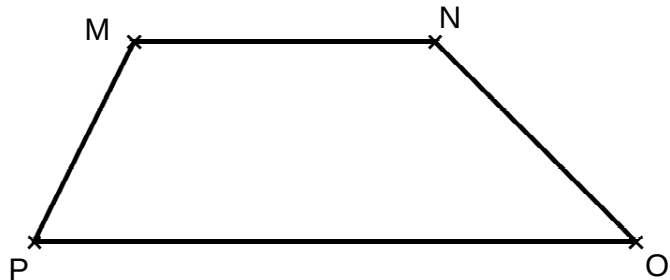
Cela revient à dire que (AB) et (CD) sont parallèles !



Ex : Soit le trapèze MNOP de bases [MN] et [OP]

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PO}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont aussi colinéaires !!



définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k \overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, il existe donc également un nombre réel k' tel que $\overrightarrow{u} = k' \overrightarrow{v}$!

Par exemple, si $\overrightarrow{v} = 3 \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3} \overrightarrow{v}$!!

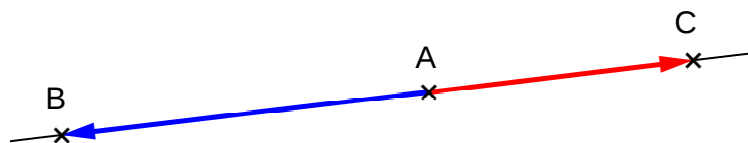


► Le **vecteur nul** est **colinéaire à tous les vecteurs**. $0 \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

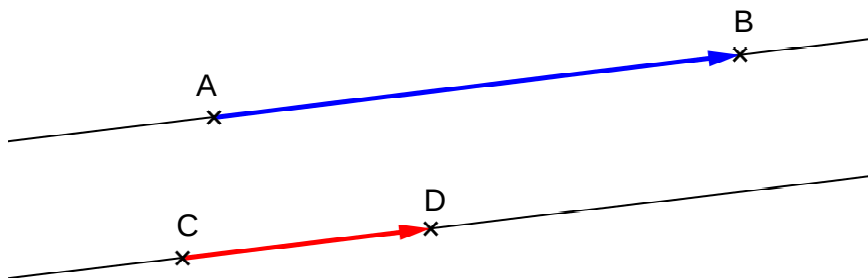
propriétés admises :

- Trois points **A, B, C** sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

A, B, C sont alignés revient en effet à dire que les droites (AB) et (AC) sont confondues (donc parallèles) !!



- Deux droites **(AB) et (CD)** sont **parallèles** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.



règles de calcul :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$; pour tous réels k et k' on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Ex :

- $4(\vec{AC} + \vec{EF}) = 4\vec{AC} + 4\vec{EF}$
- $3\vec{AB} - 6\vec{AB} = (3 - 6)\vec{AB} = -3\vec{AB}$
- $-8(5\vec{AB}) = -40\vec{AB}$

propriété : Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont **colinéaires** si, et seulement si,
 $xy' - x'y = 0$

► **justification**

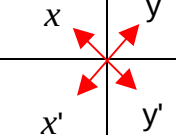
Supposons que $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ soient **colinéaires**.

Il existe alors un nombre réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$.

Les **coordonnées des vecteurs** sont donc **proportionnelles**.

On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

coordonnées de $\vec{u}$	x	y
coordonnées de $\vec{v}$	x'	y'



On a donc $xy' = x'y$ (règle des produits en croix)

Par suite, $xy' - x'y = 0$

Ex :

- $\vec{u}(3;-2)$ et $\vec{v}(-9;6)$ sont colinéaires car $3 \times 6 - (-2) \times (-9) = 18 - 18 = 0$
- $\vec{w}(3;2)$ et $\vec{z}(6;5)$ ne sont pas colinéaires car $3 \times 5 - 2 \times 6 = 3$

SUITES

I) Notion - Définitions :

a) notion de suite numérique :

En France, le premier service météorologique est créé en 1855. A partir de cette date, les températures sont relevées chaque jour. La liste de tous les nombres obtenus grâce à ces mesures permet d'observer l'évolution du climat. Pour cela, cette liste doit être ordonnée afin de pouvoir se repérer et dater les constatations.

Supposons que les premiers termes de cette liste soient :

$-4,5^\circ$; 6° ; 15° ; $-9,4^\circ$ etc.

Vous savez alors que le deuxième terme de la liste (dit aussi "terme de rang 2") (6°) correspond à la température relevée **le deuxième jour**, que $-9,4^\circ$ est la température du **4ème jour** etc.

Imaginez que les relevés des températures se poursuivent indéfiniment au cours du temps, vous obtenez **une liste ordonnée de nombres réels** contenant un **nombre infini de termes**.

Cela vous donne une assez bonne idée de ce qu'est en mathématiques une suite numérique.

Ecrire une telle liste, c'est associer à un nombre réel (la température) le nombre correspondant au rang qu'il occupe !!

15 correspond au rang 3; $-9,4$ au rang 4 etc.

On a donc défini **une fonction** !!

Par exemple, 6 est l'image de 2 par cette fonction.



b) définition et notation :

définition : Une **suite numérique** u est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$ à partir d'un certain entier naturel (**)) Cette suite est notée (u_n)

On note u_n ou $u_{(n)}$ le **terme de rang n** de la suite.



Ex :

► Le tableau ci-dessous donne la température moyenne annuelle relevée à Paris (source : station météo de Paris-Montsouris)

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	
température moyenne ($^\circ\text{C}$)	5,13	9,60	11,96	11,98	11,43	11,37	11,56	10,24	11,99	10,81	

On peut définir la suite u_n des températures en choisissant comme rang n le nombre d'années écoulées depuis l'an 2003.

On a alors $u_0 = 5,13$; $u_1 = 9,6$; $u_6 = 11,56$

$10,81$ est le **terme de rang 9 de la suite (u_n)**

► (**) A partir des données du tableau précédent, on aurait très bien pu définir une suite (v_n) à partir du rang 2003.

On a alors $v_{2003} = 5,13$; $v_{2004} = 9,6$; $v_{2009} = 11,56$

La fonction v est ici définie sur une partie de $\mathbb{N}$ (tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 2003). La suite numérique (v_n) peut aussi s'écrire $(v_n)_{n \geq 2003}$



II) Modes de génération d'une suite numérique :

Pour définir, créer une suite on peut utiliser plusieurs procédés !



a) à l'aide d'une formule explicite :

définition : Quand une suite (u_n) est donnée par son terme général u_n défini **directement** en fonction de n , on dit que la suite est définie sous **forme explicite**.

Ex :

► Soit la suite (w_n) telle que $w_n = 3n + 2$
 $w_0 = 3 \times 0 + 2 = 2$; $w_7 = 3 \times 7 + 2 = 23$

on a $w_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x + 2$!

► Soit la suite (v_n) telle que $v_n = \sqrt{n - 4}$
 $v_4 = \sqrt{4 - 4} = 0$; $v_9 = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

attention, la suite v_n n'est définie **qu'à partir du rang $n=4$!!** Le nombre sous le radical ne peut pas être négatif !



b) par récurrence :

définition : Quand une suite (u_n) est donnée par son premier terme et **une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent**, on dit que la suite (u_n) est définie par **une relation de récurrence**.

Je suis sur le premier barreau d'une échelle. Je hisse mon pied droit sur le deuxième échelon, j'exerce une poussée et me voilà sur le barreau suivant. Je vais maintenant répéter le processus précédent pour atteindre le troisième échelon. Et ainsi de suite pour continuer à grimper. Je procède par **récur-rence** (du latin recurrere "revenir en arrière"). Je regarde "en arrière" pour reproduire le procédé.

la suite (u_n) est qualifiée de **suite récurrente**



Ex :

► Soit la suite (v_n) telle que $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 4v_n - 3$

$v_1 = 4v_0 - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17$

$v_2 = 4v_1 - 3 = 4 \times 17 - 3 = 65$

etc.

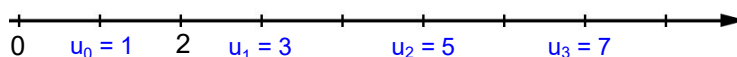
(v_n) est définie par son premier $v_0 = 5$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = 4x - 3$

III) Représentation graphique d'une suite :

a) sur un axe :

Soit (u_n) la suite formée par les entiers impairs rangés dans l'ordre croissant.

On place les termes u_0, u_1, u_2 etc.. sur l'axe



b) dans un plan :

Soit la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{n^2}{4} + \frac{1}{2}$

On place dans un repère les points de coordonnées $(n; u_n)$

$$u_0 = \frac{0^2}{4} + \frac{1}{2} = 0,5$$

$$u_1 = \frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} = 0,75$$

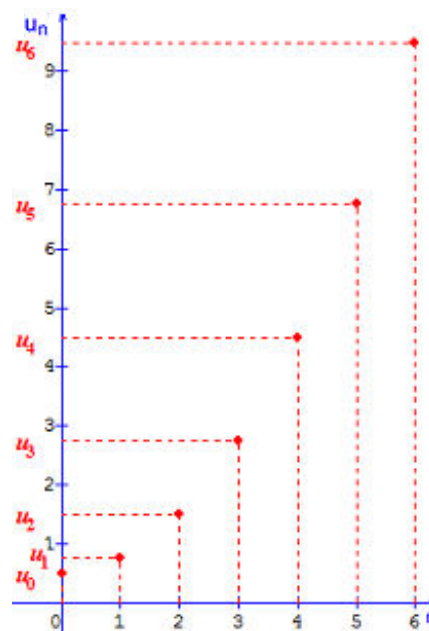
$$u_2 = \frac{2^2}{4} + \frac{1}{2} = 1,5$$

$$u_3 = \frac{3^2}{4} + \frac{1}{2} = 2,75$$

$$u_4 = \frac{4^2}{4} + \frac{1}{2} = 4,5$$

$$u_5 = \frac{5^2}{4} + \frac{1}{2} = 6,75$$

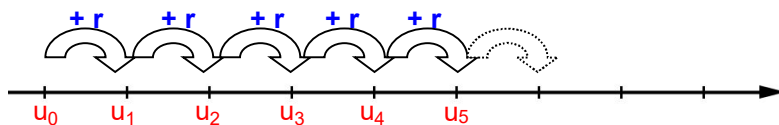
$$u_6 = \frac{6^2}{4} + \frac{1}{2} = 9,5$$



IV) Suites arithmétiques:

définition : une suite (u_n) est une **suite arithmétique** si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$
Le réel r est appelé **raison de la suite** (u_n)

chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent le même réel r !



Ex :

► la suite des entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1

► la suite des nombres pairs 0, 2, 4, 6..... est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

► Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 4n + 3$. (u_n) est une suite arithmétique de raison 4
 $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 3 - 4n - 3 = 4n + 4 + 3 - 4n - 3 = 4$

propriété 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$

Ex : Soit (w_n) une suite arithmétique de premier terme $w_0 = 7$ et de raison 3
 $w_{54} = 7 + 54 \times 3 = 169$

► approche de la démonstration

(la démonstration complète ne peut être effectuée à ce stade)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r

Par définition,

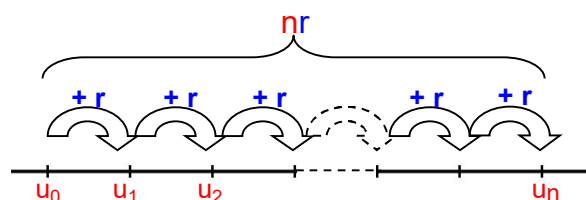
$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$$

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r$$

⋮

$$u_n = u_{n-1} + r = u_0 + (n-1)r + r = u_0 + nr$$



propriété 1 (bis): Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Pour tous nombres entiers naturels n et p , on a $u_n = u_p + (n-p)r$

► démonstration

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r

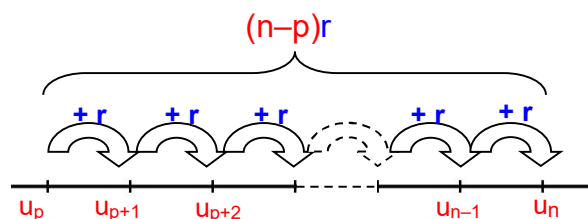
Soit n et p deux nombres entiers naturels

D'après la propriété précédente,

$$u_n = u_0 + nr \text{ et } u_p = u_0 + pr$$

$$\text{donc, } u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = (n-p)r$$

$$\text{donc, } u_n = u_p + (n-p)r$$



propriété 2 :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

← somme des entiers de 1 à n

► démonstration

On peut écrire la somme S des n premiers termes de deux manières :

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

Additionnons les deux lignes,

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ + \\ S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S = 1+n + n+1 + \dots + n+1 + n+1 \end{array}$$

on obtient une somme de n termes égaux à (n + 1)

Donc $2S = n(n+1)$

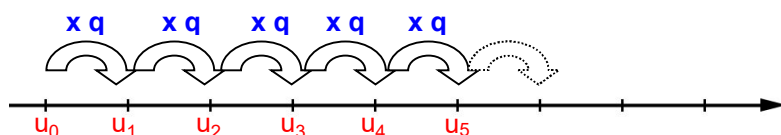
Par suite, $S = \frac{n(n+1)}{2}$

V) Suites géométriques :

définition : une suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times q$

Le réel q est appelé raison de la suite (u_n)

chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par le même réel non nul q



Ex :

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5$$

► La suite des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32.... est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

► Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 3 \times 5^n$. (u_n) est une suite géométrique de raison 5 car $u_{n+1} = 3 \times 5^{n+1} = (3 \times 5^n) \times 5 = u_n \times 5$

propriété 3 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$

► approche de la démonstration

(la démonstration complète ne peut être effectuée à ce stade)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

Par définition,

$$u_1 = u_0 \times q$$

$$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q \times q = u_0 \times q^2$$

$$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^2 \times q = u_0 \times q^3$$

⋮

$$u_n = u_{n-1} \times q = u_0 \times q^{(n-1)} \times q = u_0 \times q^n$$

propriété 3 (bis): Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q
 Pour tous nombres entiers naturels n et p , on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

► **démonstration**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

Soient n et p deux nombres entiers naturels

D'après la propriété précédente,

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ et } u_p = u_0 \times q^p$$

$$\text{donc, } \frac{u_n}{u_p} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = q^{n-p}$$

$$\text{donc, } u_n = u_p \times q^{n-p}$$

propriété 4 :

Pour tout réel q ($q \neq 1$),

$$\text{on a } 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

← somme des $(n + 1)$ premières puissances successives de q

$$\text{Ex: } 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11} = \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3} = 265\,720$$



► **démonstration**

Soit un réel q tel que $q \neq 1$

$$\begin{array}{lcl} \text{Soit} & S & = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ \text{on a} & qS & = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \end{array}$$

Faisons la différence des deux lignes,

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ - qS & = & q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ \hline (1 - q)S & = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

or, $(1 - q) \neq 0$

$$\text{donc } S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

dérivation et convexité

I) Rappels:

a) nombre dérivé :

définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et $a + h$ sont deux nombres réels appartenant à I avec $h \neq 0$.

► f est dérivable en a revient à dire que :
lorsque h tend vers 0, alors le taux d'accroissement de la fonction entre a et $a + h$ tend vers un nombre réel ℓ

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a . On le note $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

► f est dérivable sur I revient à dire que f est dérivable en chaque réel x de I

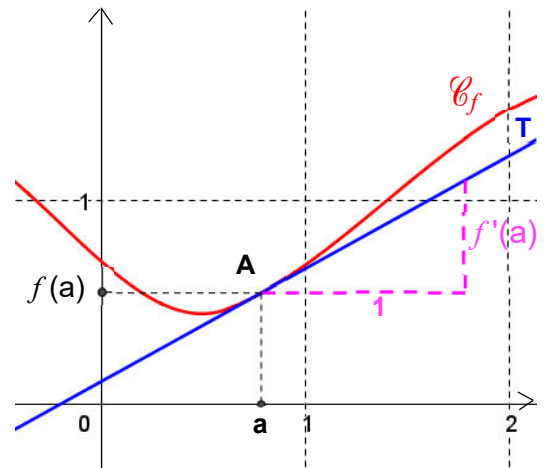
► f' est la fonction dérivée de f . Elle associe à chaque réel x de I le nombre $f'(x)$

b) tangente à une courbe :

propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en un réel a appartenant à I . Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



c) dérivée et sens de variation d'une fonction :

propriétés : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

► f est croissante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est positive sur I

Pour tout nombre réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$

► f est décroissante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est négative sur I

Pour tout nombre réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$

► f est constante sur I si et seulement si la fonction dérivée f' est nulle sur I

Pour tout nombre réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$

d) extremum local :

propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre réel de I qui n'est pas une extrémité de I .

► S'il existe un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

► Si f' s'annule en a et change de signe alors $f(a)$ est un extremum local

x	a
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$f(a)$



$f(a)$ est un maximum local →
← $f(a)$ est un minimum local

x	a
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	$f(a)$

II) Dérivées de fonctions usuelles et opérations sur les dérivées :

a) dérivées de fonctions usuelles :

fonction	domaine de définition	domaine sur lequel la fonction est dérivable	fonction dérivée
fonction constante : $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
fonction affine : $f(x) = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
fonction puissance : $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
fonction racine : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) opérations sur les dérivées :

propriétés:

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Soit k un nombre réel

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + v'u$
u^2 est dérivable sur I	$(u^2)' = 2uu'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

c) dérivée de la composée de deux fonctions :

rappel : certaines fonctions ne sont pas des sommes, produits ou quotient de fonctions usuelles. Elles peuvent être la **composition** de plusieurs fonctions.

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{3 + x}$

Pour obtenir $f(x)$, on d'abord déterminer $3 + x$ puis la **racine carrée** du nombre obtenu. f est l'enchaînement de deux fonctions :

- u définie sur $\mathbb{R}^+$ par $u(x) = 3 + x$
- v définie sur $\mathbb{R}^+$ par $v(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{3 + x} = v(u(x))$$

se note aussi $v \circ u(x)$ « v rond u de x »



propriété (admise) :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et v une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $u(I)$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I .

Pour tout réel x de I

$$\text{On a alors } (v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Ex :

► la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$ est définie sur $\mathbb{R}$

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$

La fonction $g = v \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout réel x , $u(x) > 0$

$$g'(x) = (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

► la fonction $h : x \mapsto (x^2 + 5)^3$ est définie sur $\mathbb{R}$

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $v : x \mapsto x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $g = v \circ u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

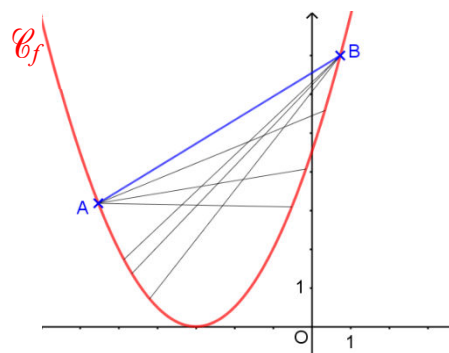
$$h'(x) = (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = 3(x^2 + 5)^2 \times 2x = 6x(x^2 + 5)^2$$

III) Convexité d'une fonction :

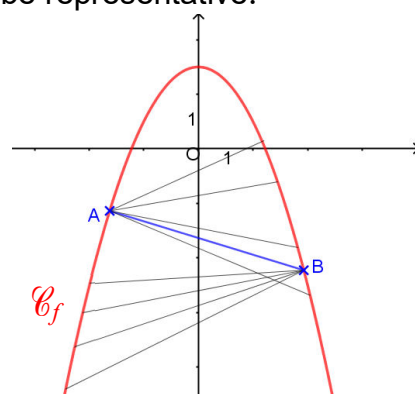
a) fonction convexe – fonction concave :

définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.



Si pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$, le segment [AB] est « au-dessus » de la courbe entre A et B alors on dit que la fonction f est **convexe** sur I .

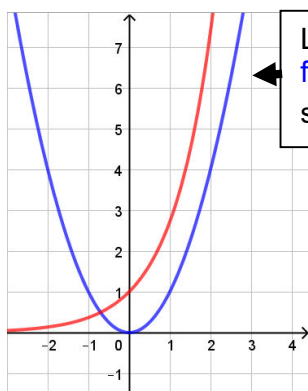


Si pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$, le segment [AB] est « au-dessous » de la courbe entre A et B alors on dit que la fonction f est **concave** sur I .

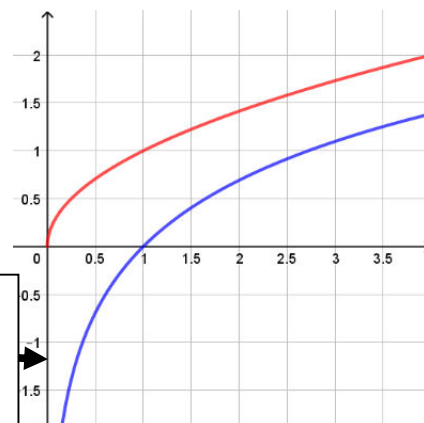


pour une fonction convexe, on peut aussi dire que la courbe est « au-dessous » des sécantes !

Ex :



La **fonction carrée** et la **fonction exponentielle** sont **convexes** sur $\mathbb{R}$

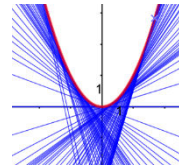


La **fonction racine carrée** est **concave** sur $[0 ; +\infty[$ et la **fonction ln** est **concave** sur $]0 ; +\infty[$

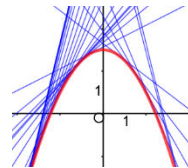
Propriétés (admisses) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

► f est **convexe** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de chacune de ses **tangentes**



► f est **concave** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de chacune de ses **tangentes**



b) point d'inflexion :

définition :

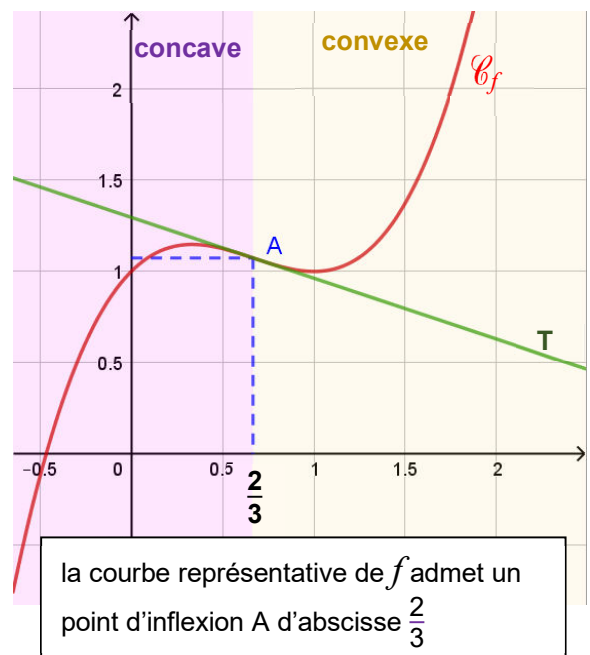
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente T en A .

conséquences :

► Quand f passe de « **convexe** » à « **concave** » ou inversement, la courbe traverse sa tangente et admet un **point d'inflexion**.



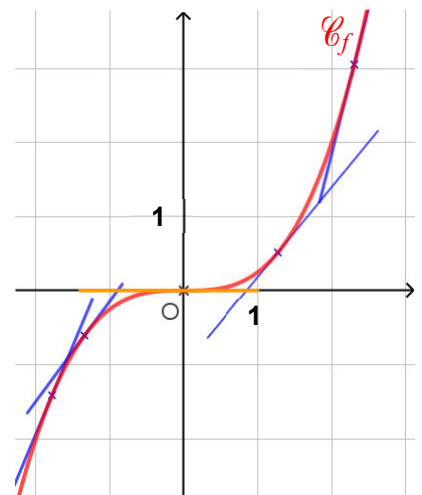
Ex :

Soit $f : x \mapsto x^3$

La courbe représentative de f , la fonction cube, admet l'origine O du repère comme point d'inflexion

f est convexe sur $[0, +\infty[$

f est concave sur $]-\infty ; 0]$



IV) Dérivées et convexité :

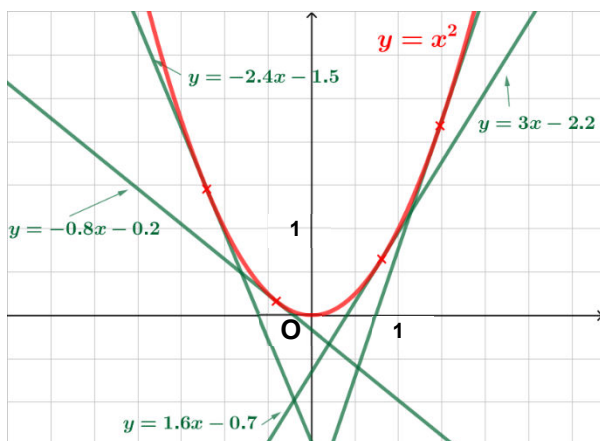
a) convexité et sens de variation de la fonction dérivée :

Propriétés (admisses) :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **convexe** sur I si, et seulement si, f' est **croissante** sur I
- f est **concave** sur I si, et seulement si, f' est **décroissante** sur I

Ex :



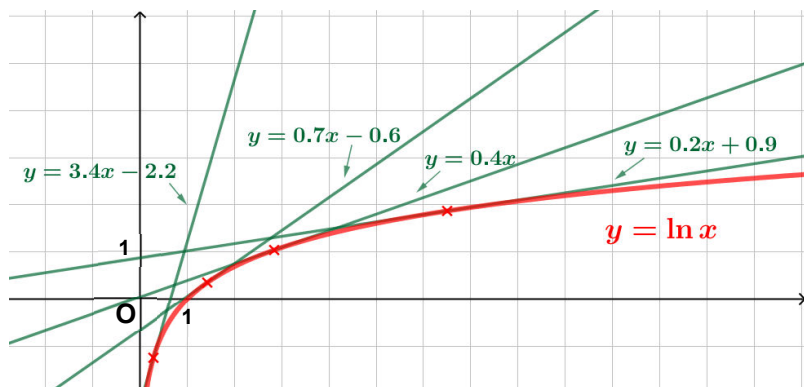
La fonction $f : x \mapsto x^2$

est **convexe** sur $\mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

La fonction f' est **croissante** sur $\mathbb{R}$

Les coefficients directeurs des tangentes (nombres dérivés) **augmentent** de la gauche vers la droite.



La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$

est **concave** sur $]0, +\infty[$

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

La fonction g' est **décroissante** sur $\mathbb{R}$

Les coefficients directeurs des tangentes (nombres dérivés) **diminuent** de la gauche vers la droite.



b) dérivée seconde et convexité :

définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

Dire que f est une fonction **deux fois dérivable** sur I revient à dire que f' est dérivable sur I

La fonction dérivée de f' est notée f'' « f seconde »

Propriétés (déduction de la définition) :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I

- f est **convexe** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$
- f est **concave** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$

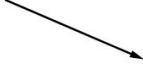


Si f'' est **positive**, alors la courbe est **au-dessus** de ses **tangentes** !

Ex : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ puis $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

On en déduit que f est **concave** sur $] -\infty ; 0[$ et **convexe** sur $] 0 , +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$			
f	concave		convexe

c) dérivée seconde et point d'inflexion :

propriété (admise) :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère et a un réel appartenant à I .

Le point $F(a ; f(a))$ est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$, si et seulement si, f' s'annule en a en changeant de signe.

Ex : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (-e^{-x})(x + 1) = -xe^{-x}$$

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-x)(-e^{-x}) = e^{-x}(x - 1)$$

x	1
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad +$

Le point F de coordonnées $\left(1, \frac{2}{e}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe représentative de f